

A dolgozat szerzőjének neve: Szabó Szilárd, Lorenzovici Zsombor

Intézmény megnevezése: Bolyai Farkas Elméleti Líceum

Témavezető tanár neve: Szász Ágota

Beosztása: Fizika

Ha vasalják a szinusz-görbét

Tartalomjegyzék

I.	Rezgések elméleti leírása	- 2 -
1.	Rezgések gyakorisága	- 2 -
2.	Harmonikus rezgések	- 2 -
3.	Rugalmas inga	- 3 -
4.	Fizikai inga, fonálinga	- 3 -
5.	A rezgőmozgást befolyásoló külső hatások	- 3 -
6.	Közeg csillapító hatása	- 4 -
7.	Súrlódásos csillapítás	- 4 -
8.	Kényszerrezgések	- 4 -
9.	Gyakorlati felhasználás	- 5 -
II.	Mérések a fizikumban	- 5 -
1.	Mérési módszerek	- 5 -
2.	Fizikai inga tanulmányozása	- 6 -
3.	A vonalzók szabadrezgésének mérése	- 7 -
4.	Csatolt rendszer rezonanciája	- 7 -
5.	Rugalmas inga csillapodása	- 7 -
6.	Összegzés	- 7 -
III.	Forrásanyag	- 8 -
IV.	Melléklet	8

I. Rezgések elméleti leírása

Munkánk során összehasonlítjuk a rezgések elméleti mozgástörvényeit, az általunk észlelt mérési eredményekkel. Ha például megmérjük egy fizikai inga rezgését, akkor kiszámolhatjuk a periódusát a tanult képlet alapján, de ugyanakkor le is olvashatjuk az adatot a grafikonról. Vajon lesz közöttük különbség és ha igen, vajon miért?

1. Rezgések gyakorisága

A rezgések és a hullámok a természet alapvető mozgásformái. Rezgésekkel és hullámokkal nem csak a mechanikában, hanem a fizika minden más területén (pl. elektromos rezgőkörök, optika, kvantummechanika), a természettudományokban (pl. Meteorológiai, kémiai és biológiai oszcillációk), sőt a társadalomtudományokban is (pl. gazdasági ciklusok) találkozunk.

A rezgések osztályozásából kiderül (1. Ábra), hogy a rezgések mennyire sokfélék, és hogy milyen szűk szegmensét tanulmányozzuk. A rezgés természetes mozgás: a környezetünkben szinte minden test végez rezgőmozgást az atomi méretektől az égitestekben kialakuló rezgésekig. A kvarckristály rezgésén alapul az órák működése. A hangszerek pedig húrok, rugalmas felületek és légoszlopok rezgésével keltenek hangot. A gépek, épületek túlzott rezgései komoly veszélyt jelenthetnek, amit el kell kerülni, hintázásnál viszont éppen az a cél, hogy minél nagyobb amplitúdójú rezgés jöjjön létre. A szívünk dobbanása is szabályosan ismétlődő rezgőmozgás.

2. Harmonikus rezgések

Minden olyan változást, amely időben valamilyen ismétlődést mutat, **rezgésnek** nevezzük. Az iskolában a periodikus rezgőmozgások közül csak a csillapítatlan, **harmonikus rezgőmozgással** foglalkozunk, ami szabályosan ismétlődő, de nem egyenletesen változó mozgás. Egy-egy teljes rezgés megtételéhez szükséges idő a **periódus**, jele **T**, fordított értéke a **ν** , vagyis a **frekvencia**. A mozgás közben állandóan változik az anyagi pontnak az egyensúlyi helyzettől mért pillanatnyi távolsága, amelyet **kitérésnek** (y) nevezzük. A legnagyobb kitérés az **amplitúdót** adja meg (**A**).

A harmonikus rezgőmozgást végző kisméretű testekhez, hozzárendelhető egy olyan egyenletes körmozgás, amelyben a kisméretű test merőleges vetülete, árnyéka, együtt mozog a rezgő ponttal (2. Ábra). Ebből a megfontolásból, a rezgő test kitérése megegyezik a körmozgást végző test

helyvektorának rezgésirányú komponensével, és mozgása az $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ egyenlettel adható meg.

3. Rugalmas inga

Rugalmas ingának nevezzük azt a rendszert, melyben egy m tömegű test, egy k rugóállandójú rugóra akasztva rezgőmozgást végez. A rugalmas ingát mozgató erőt kifejezhetjük egyrészt Newton, másrészt Hooke törvénye alapján: $F = ma = -m\omega^2 y$, illetve $F = -ky$. Az előző két összefüggés alapján a rugalmas inga periódusa: $2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Az általa leírt mozgás grafikonja a 3. ábrán látható.

4. Fizikai inga, fonálinga

Ha egy merev testet egy tömegközéppontján kívül húzódtó vízszintes tengelyre felfüggesztjük, az így létrejött mechanikai rendszer a **fizikai inga** (4.ábra). Egy fizikai inga kiterjedt méretű és a fonálinga (más néve gravitációs, matematikai inga) általánosításaként fogható fel, periódusa: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_r}{g}}$. Példa lehet rá egy rúd amely rögzített tengely körül forog, a gravitációs inga ezzel ellenben egy nyújthatatlan zsinegre illesztett anyagi pont.

Ha az ingát kitérítjük és elengedjük, akkor függőleges síkban egy l sugarú köríven leng. Kísérlettel megállapítható, hogy a fonálinga lengési ideje független az amplitúdótól és az ingatest tömegétől. A lengésidő kis kitérések esetén (5 foknál kisebb) egyenesen arányos az inga hosszának és a gravitációs térerősség hányadosának négyzetgyökével: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

5. A rezgőmozgást befolyásoló külső hatások

Amikor egy rezgésre képes rendszert csak egy erőlkéssel hozunk mozgásba és utána magára hagyjuk, akkor az **szabadrezgést, sajátrezgést** végez. A gyakorlatban és a kísérleteinkben észrevettük, hogy az ilyen módon magára hagyott rezgő test amplitúdója a fékező hatások miatt folyamatosan csökken, végül a test mozgása megáll. Tehát a magára hagyott testek rezgése **csillapított rezgés**. Ha **csillapítatlan rezgést** akarunk fenntartani, akkor a csillapító hatásokat más hatásokkal ki kell egyenlíteni, pl.: megfelelő ütemben lökni kell a hintát.

6. Közeg csillapító hatása

Ha a csillapodás a közegellenállásnak köszönhető, akkor az amplitúdók csökkenése exponenciális (5. Ábra). Matematikailag az ilyen rezgések egyszerűen a sebességgel arányos, $F_{cs} = -k \cdot \frac{dx}{dt}$ csillapító erő segítségével írhatók le, az eredő erő egy dimenzióban így nézne ki: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt}$. Ha a súrlódási erő kicsi a rugalmassági erőhöz képest ($c/2m < \omega_0$), akkor a megoldás: $x(t) = A e^{-\frac{c}{2m}t} \sin(\omega t + \delta)$. Ilyen esetben a mozgás során az egymást követő egyirányú maximális kitérések hányadosa, az ún. csillapodási hányados állandó, megadható a következő kifejezéssel:

$$K = \frac{x_{\max}(t')}{x_{\max}(t'+T)} = \frac{e^{-\beta t'}}{e^{-\beta(t'+T)}} = e^{\beta T}$$

ahol a β a csillapítási tényezőt jelenti. Bármely két olyan időpontban, amelyek különbsége T a $\Lambda = \ln K = \beta \cdot T$ rezgés azonos fázisban van, de a megfelelő két kitérés nem azonos mértékű, hanem egymás K -szorososa. Ezeknek az egyenleteknek a megoldása azonban magasabb szintű matematikát igényel, ezért mi inkább a mérésekre és a GeoGebra adta lehetőségekkel próbáljuk vizsgálni a jelenségeket.

7. Súrlódásos csillapítás

Ha a csillapított rezgést a súrlódási erő idézi elő, akkor a rezgés burkoló görbéje már nem exponenciális, ilyenkor a csökkenő amplitúdók a kitérés idő grafikonon egyenesre illeszkednek (5. Ábra). Ez könnyen igazolható, ha meghatározzuk az energiamegmaradás tétele alapján a

K csillapodási hányados értékét. A 6. Ábrán található levezetés alapján: $K_{n(n+1)} = 1 - \frac{2nF_s}{k \cdot A_n}$,

és a kapott mozgástörvény formája: $x(t) = A(1 - \beta t) \sin(\omega t + \delta)$, ahol $\beta = \frac{k A_0}{2T \cdot F_s}$. Innen is

látható, hogy csillapítási tényező függ a kezdeti amplitúdó értékétől.

8. Kényszerrezgések

Az eddig tárgyalt rezgések ún. **szabad rezgések** voltak.

Az olyan jelenséget, amelynél két vagy több rezgő rendszer kölcsönösen befolyásolja egymás rezgését, **csatolt rezgésnek** nevezzük. Az olyan csatolt rezgést, mikor egy rezgő rendszer egy külső gerjesztő hatásának megfelelően kényszerül mozogni, **kényszerrezgésnek** nevezzük.

A gerjesztő hatást változtatva megfigyelhető a kényszerrezgés amplitúdójának változása. Ez az amplitúdó akkor a legnagyobb, ha a kényszerítő hatás rezgésszáma megegyezik a kényszerrezgést végző test saját rezgésszámával. Ez az eset a **rezonancia** jelensége. A kényszerrezgés amplitúdója olyan nagyra növekedhet, hogy a rezgő rendszer tönkremegy. Az a rezonancia katasztrófa.

9. Gyakorlati felhasználás

A rezgéscsillapítás célja a rezgést végző szerkezet vagy csupán egyes elemei kitérésének, ill. az ezzel együtt járó mechanikai igénybevételeinek csökkentése, egy már nem megengedhető határérték alá. Ez történhet a gerjesztési hatások csökkentésével vagy a rezgő rendszerből történő energia-elvonással. Gyakorlatilag a rezgési energia felemésztését jelenti valamilyen módszerrel.

Rezgéscsillapítás növelésével találkozunk: **munkagépek alapzatánál** (megfelelő alapozás kiépítése, jó anyagválasztással), **gépek rezgéscsillapításánál** (a gépházak többnyire öntöttvasból készülnek, az öntöttvas jó rezgéselnyelő), **berendezések lengéscsillapításánál** (beépített lengéscsillapítók alkalmazásával, pl. rugós, hidraulikus, pneumatikus szerkezetek), **zaj terjedésének csillapításánál**, **hangszigetelésnél** (megfelelő anyagválasztás, ajtó, ablak, falak rezgés- és zajvédelme), **elektromágneses rezgések, sugárzások leszigetelésénél** (többnyire árnyékolással, ha az adott igények megkövetelik, akkor pl. ellenrezgés generálással).

II. Mérések a fizikumban

1. Mérési módszerek

A mérés alapja az összehasonlítás, amivel nemcsak fizikaórákon találkozunk, hanem szinte mindenhol a közvetlen környezetünkben. A természeti jelenségek tanulmányozásában a kísérletezésen kívül ma már természetesnek tűnik, ha a számítógépet is használjuk kivetítőként, számítások elvégzésében, szöveg és táblázatkezelésben, modellek, szimulációk vizsgálatában, dokumentálódásban stb., hiszen ezáltal nekünk diákoknak érdekesebbnek, mozgalmasabbnak, érthetőbbnek tűnik egy-egy óra. Mi a számítógépet kis kiegészítéssel mérőeszközként szeretnénk használni, alkalmassá téve ezáltal rövid idejű mechanikai jelenségek vizsgálatára.

Méréseinket az **Xplorer GLX** nevű adatgyűjtő eszköz tette lehetővé (7. Ábra), ami egy hordozható központi egységből áll, amihez számtalan kiegészítőt, többek között egy

mozgásérzékelőt is lehet csatlakoztatni. A gép grafikonok formájában tárolja a méréseket, amelyet később adathordozóra vagy számítógépre is át tudunk telepíteni. Az adatok könnyebb feldolgozása érdekében, adnak hozzá egy illesztőprogramot, mely segítségével sokkal érdekesebb módon tudjuk elemezni a kapott adatokat, így nem csak kimutatni tudjuk a mérés értékeit, hanem, informatikusok lévén, függvényeket építhetünk fel a mért adatokból. A csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás adataiból ki tudjuk számítani az amplitúdót, frekvenciát, periódust és fel lehet írni a kitérés, a sebesség, gyorsulás egyenletét. Ezeknek az adatoknak a segítségével elkészíthetők számítógépes szimulációk, amelyek a program lefuttatásakor rajzolják ki a grafikont, és ezzel egyidőben egy animáció segítségével szemléltetik a jelenséget. Ezek nagyon megkönnyítik a különféle bonyolult jelenségek megértését.

2. Fizikai inga tanulmányozása

Kísérleti eszközként ezúttal a fizika laborban található két fizikai inga szolgált (15. ábra), melyeknek a tömege: $m_1 = 17 \text{ kg}$, illetve $m_2 = 1,75 \text{ kg}$ (pontatlanság $\pm 1\text{g}$). A mérések közül a kisebb tömegű és $l = 56\text{cm}$ (pontatlanság $\pm 1 \text{ mm}$) hosszúságú fizikai inga rezgési grafikonja a 8. ábrán látható.

Meghatároztuk az ingáknál kialakult csillapodó rezgőmozgás periódusát különböző esetekben. Összehasonlítva a mért és a számított periódusértékeket (lásd 17. ábra), arra a következtetésre jutottunk, hogy a nagy tömegű ingánál lehet számolni a gravitációs inga képletével, míg a kis tömegű inga mozgását a merev rúd nagymértékben befolyásolja. Itt csak az inga redukált hosszával lehet a számításban jó eredményt elérni. A kapott mérések alapján a kisebbik ingára felírt elméleti függvény: $f(x) = 11 \cdot e^{-0,12x} \cdot \sin(4,27x)$, grafikus képe látható a (16. ábrán). Arra lettünk figyelmesek, hogy a két grafikon közt nagy az eltérés. Annak ellenére, hogy a közeg csillapítási tényezője elméletileg állandó kéne legyen, a számításaink során rájöttünk, hogy az értéke fokozatosan nő egy bizonyos pontig, majd csökken, és innen származik a két grafikon közötti nagy eltérés. Ebből arra a következtetésre jutottunk, hogy, az elméleti görbe és a mért görbe a mozgás első felében fedik csak egymást.

3. A vonalzó szabadrezgésének mérése

Vonalzók szabadrezgéseit különböző anyagú (műanyag, fém, fa), és hosszúságú vonalzókat felhasználva tanulmányoztuk. Merev rudak rezgéseinek az elméleti leírása hídmérnökök számára is komoly kihívás, ezért mi egyenesen a rezgés jellemzőit kizárólagosan mérés útján határoztuk meg. A mérési módszer igen egyszerű volt, a vonalzót egy asztalra erősítettük, beállítva a lelógó végének hosszát, majd a lelógó rész alá helyeztük a rezgésérzékelőt (lásd 9. Ábra). A vonalzóra egy fekete papírt ragasztottunk, hogy a szenzor be tudja mérni, majd megpendítettük a vonalzót mindig ugyanakkora erővel. Természetesen mindenik rezgésnek a grafikonja egy csökkenő szinuszgörbe volt (10. Ábra). Kimutattuk, hogy mennyire függ a szabadrezgés periódusa a vonalzó szabad hosszától.

4. Csatolt rendszer rezonanciája

Az 11. ábrán látható csatolt rendszer segítségével vizsgáltuk két fizikai inga közötti energiaátadást. Egyszerre figyeltük a gerjesztett és a gerjesztő ingák mozgását. A gerjesztő tömegközéppontját változtattuk, és figyeltük, hogy ennek függvényében mekkora lesz a gerjesztett inga amplitúdója. Az általunk mért eredményeket a 12. ábrán szemléltetjük. Ez a görbe hasonlít az elméleti rezonanciagörbére, és egyértelműen levonhatjuk azt a következtetést, hogy akkor a legnagyobb az amplitúdó, amikor a két inga tömegközéppontja azonos.

5. Rugalmas inga csillapodása

Az általunk tanulmányozott rugalmas inga az 13. ábra szerint volt összerakva. Ez egy rúdra akasztott $k=9,9 \frac{N}{m}$ (pontatlanság $\pm 0,01 \text{ N/m}$) rugóállandójú rugóból állt, melyre $m = 117\text{g}$ (pontatlanság $\pm 1\text{g}$) tömegű testet helyeztünk, majd különböző amplitúdókkal mozgásnak indítottuk. A kapott mozgásgrafikonok közül egy a 14. ábrán látható. A méréseinkből kiderül, hogy a rezgés kezdeti amplitúdójától nem függ a periódusa, ami várható is volt, de itt is látható a mért és az ennek megfelelő elméleti grafikon közötti eltérés.

6. Összegzés

A csillapodó rezgésekkel való számolásnál, talán a legfontosabb szerepe a csillapítási tényezőnek van. Anyaggyűjtésünk során azt találtuk, hogy ez a β -val jelölt tényező állandó. Amint azt

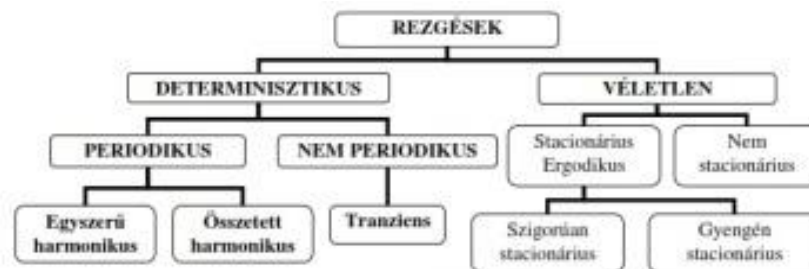
dolgozatunkban leírtuk, végeztünk méréseket rugalmas ingával, fizikai ingával és vonalzókka, mindenre kiszámoltuk a csillapítási tényezőt, de sehol sem volt állandó, mitöbb olyan mértékű változást mutatott, amely már nem tulajdonítható mérési hibának. Ennek alapján, dolgozatunk legfőbb következtetése az, hogy a csillapodó rezgéseknél a csillapítási tényező nem állandó, ahogy azt forrásanyagainkból olvastuk, és szerintünk ez a legfőbb oka annak, hogy mozgásgrafikonok között különbség.

III. Forrásanyag

- | | |
|--|--|
| 1. Muttnyánszky Ádám: Szilárdságtan.
Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1981. | 3. Sarkadi Dezső: A fizikai inga csodája
Ecseri Éva, 2010 |
| 2. Békéssy László – Bustya Áron:
Fizikai kettősinga vizsgálata
(Mandelbrot TDK, Szent László
ÁMK, Baja, 2004) | 5. Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I.
6. Kováts Attila, Miskolci Egyetem: Zaj-
és rezgésvédelem |

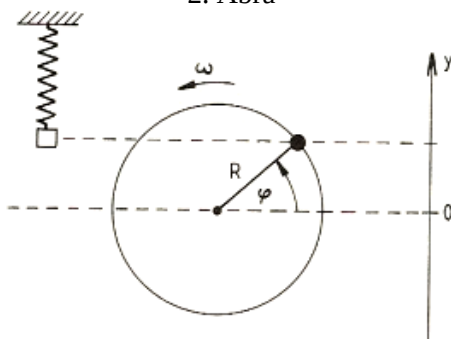
IV. Melléklet

1. Ábra

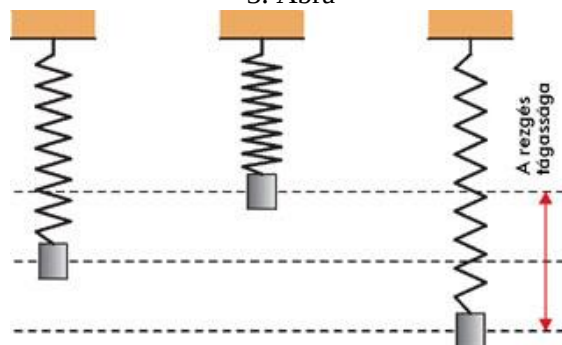


A rezgések felosztása az MSZ ISO 2041-1995 szerint [33]

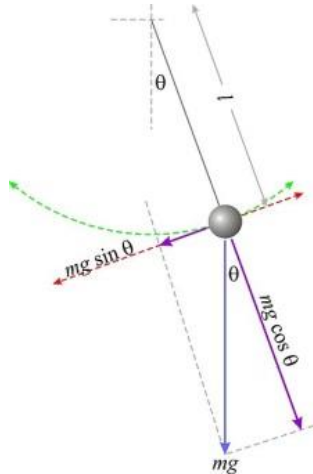
2. Ábra



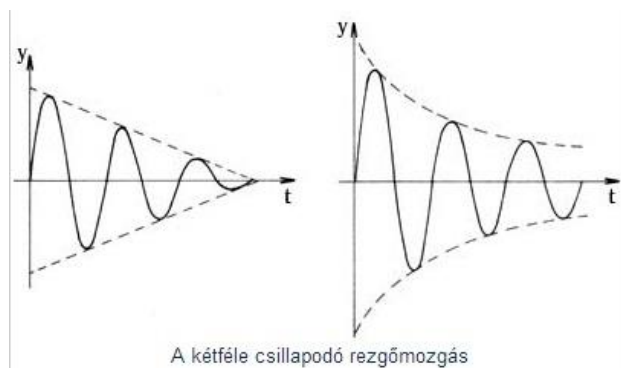
3. Ábra



4. Ábra

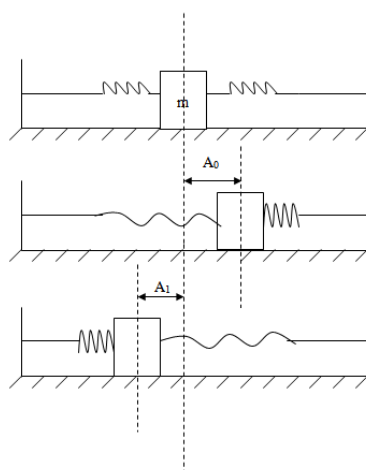


5. Ábra



A kétféle csillapodó rezgőmozgás

6. Ábra



$F_r > F_s$ - feltétel, hogy elinduljon a mozgás

$$F_s = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g$$

Energiamegmaradás törvénye alapján

$$\frac{k \cdot A_0^2}{2} = \frac{k \cdot A_1^2}{2} + F_s \cdot (A_0 + A_1)$$

$$\frac{k}{2} (A_0^2 - A_1^2) = F_s \cdot (A_0 + A_1)$$

$$(A_0 - A_1) \cdot (A_0 + A_1) = \frac{2F_s}{k} \cdot (A_0 + A_1)$$

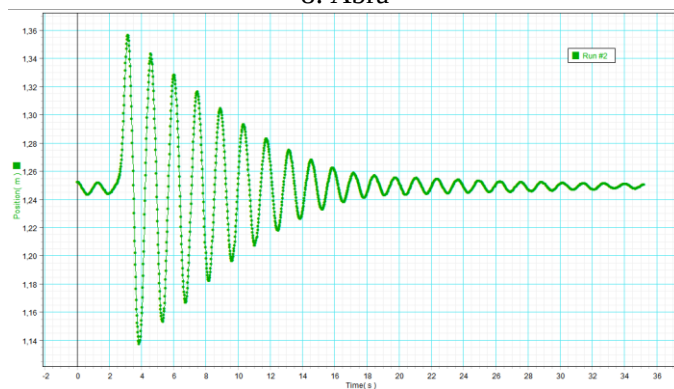
$$(A_0 - A_1) = \frac{2F_s}{k} \Rightarrow A_{n+1} = A_n - \frac{2F_s}{k}$$

$$K_{01} = \frac{A_1}{A_0} = \frac{A_0 - \frac{2F_s}{k}}{A_0} = 1 - \frac{2F_s}{k \cdot A_0}$$

$$K_{n(n+1)} = 1 - \frac{2F_s}{k \cdot A_n}$$



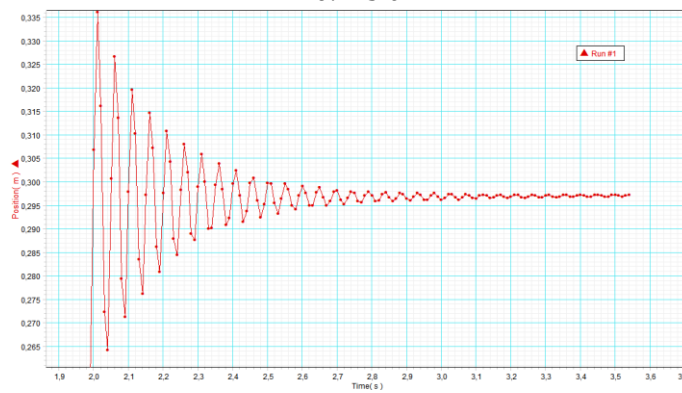
8. Ábra



9. Ábra



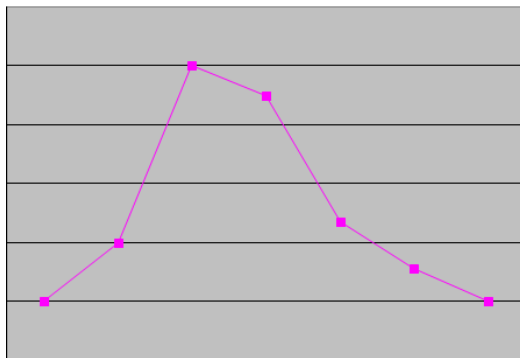
10. Ábra



11. Ábra



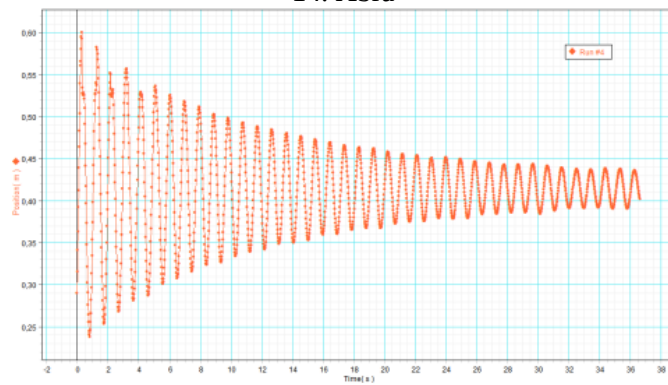
12. Ábra



13. Ábra



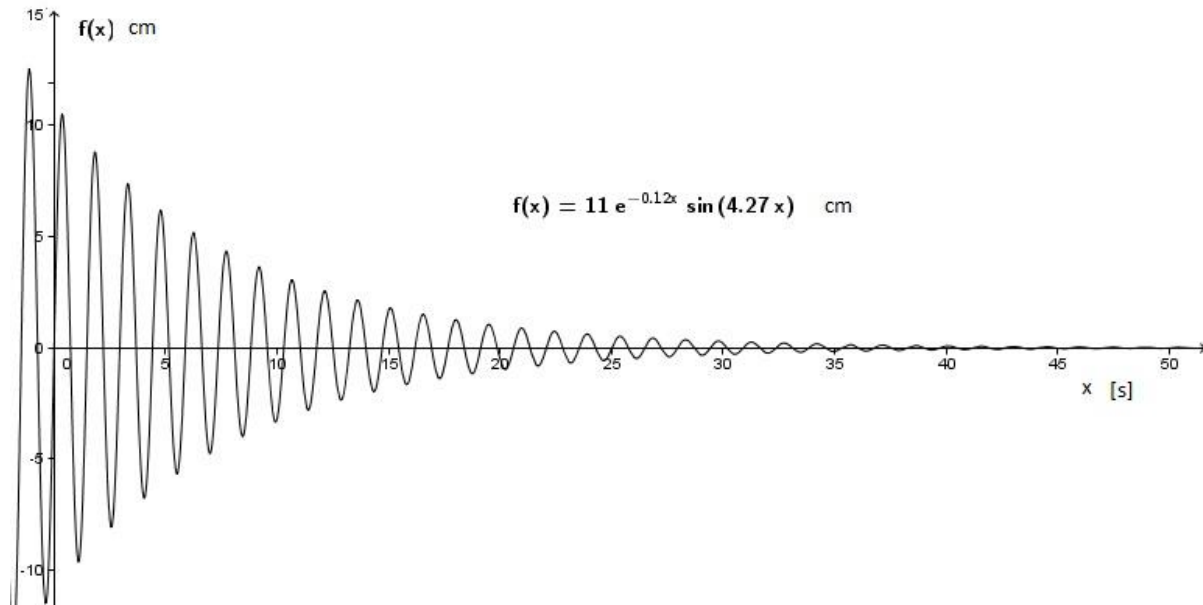
14. Ábra



15. Ábra



16. Ábra



17. Ábra

	inga	inga2	inga3	inga4	inga5	inga6
Hossz	61 cm	56 cm	50 cm	61cm	56 cm	50 cm
T	1.57 s	1.51 s	1.43 s	1.51 s	1.48 s	1.43 s
T elm.	1.566 s	1.5 s	1.42 s	1.566 s	1.5 s	1.42 s
Súly	17 kg	17 kg	17 kg	1,7 kg	1,7 kg	1,7 kg